# Zagadnienia mechaniki materiałów kompozytowych

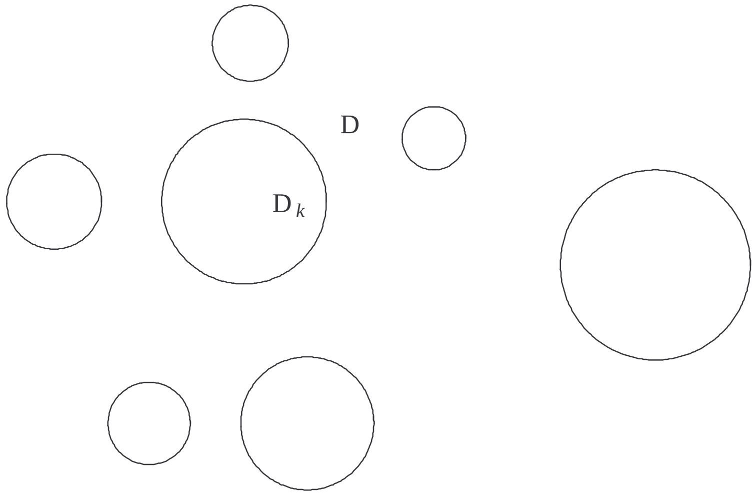
*Vladimir Mityushev*

Instytut Matematyki, Akademia Pedagogiczna w Krakowie

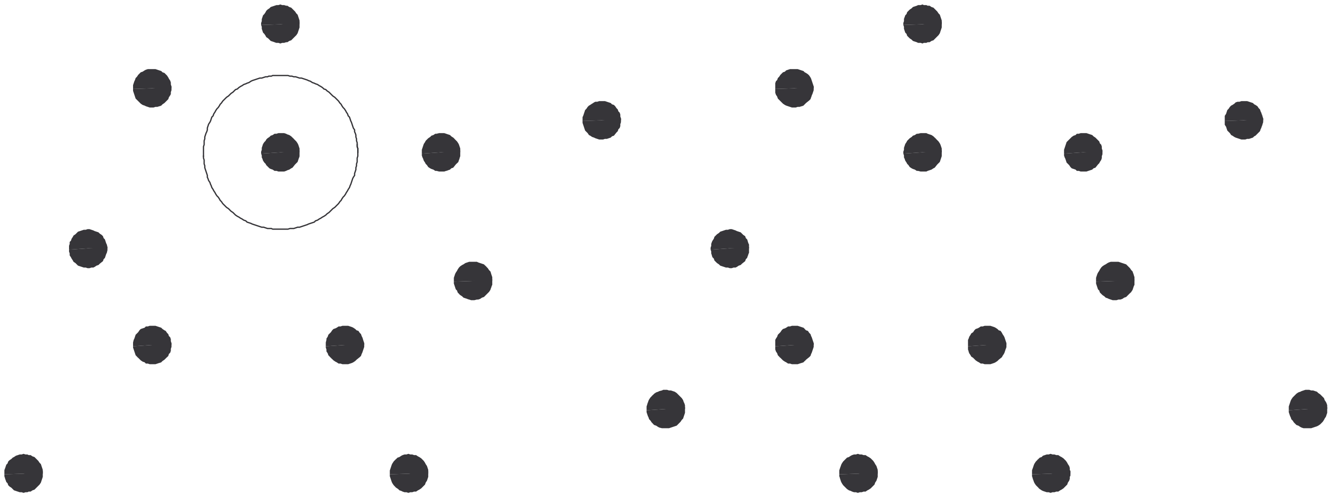
# 1. Zagadnienie Riemanna-Hilberta dla obszarów wielospójnych

Wyznaczyć funkcję $\phi(z)$ analityczną w $D$ ciągłą w $D \cup \partial D$ spełniającą warunki brzegowe

$$\mathrm{Re}\,\overline{\lambda(t)}\,\phi(t) = f(t) \text{ on } |t - a_k| = r_k, \; k = 1, 2, \ldots, n. \qquad \text{(RH)}$$



# 2. Zagadnienia mechaniki materiałów kompozytowych

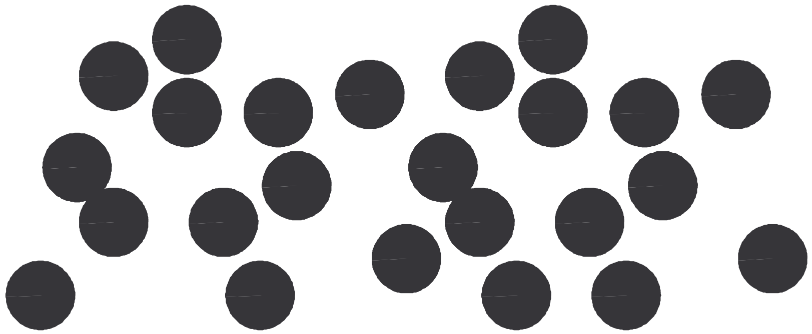


Przy założeniu, że wszystkie wtrącenia są jednakowe i odległości pomiędzy wtrąceniami są duże, tzn. koncentracja wtrąceń $v$ jest wystarczająco mała, jest słuszny przybliżony wzór Clausiusa-Mossotti'ego (Maxwella-Garnetta) uzyskany w 1864

$$\lambda_e \approx \frac{1+\rho v}{1-\rho v}, \qquad \text{(CM)}$$

gdzie $v$ jest udziałem objętościowym wtrąceń, $\rho = \frac{\lambda^- - 1}{\lambda^- + 1}$ - parameter kontrastu; przewodność osnowy $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda^-$ przewodność wtrąceń.

W przypadku dużych $v$ wzór (CM) nie jest słuszny, bo w tym przy padku występuje efekt perkolacji:



Są znane inne ciekawe wzory dla kompozytów innej struktury geometrycznej.

Efektywna przewodność laminat $\lambda_e^x = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$ - średnia arytmietyczna, $\lambda_e^y = \left(\frac{v_1}{\lambda_1} + \frac{v_2}{\lambda_2}\right)^{-1}$ - średnia harmoniczna.

Efektywna przewodność szachownicy $\lambda_e = \sqrt{\lambda_1 \lambda_2}$ .

Podstawowe pytanie teorii uśrednienia równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych. Mamy równanie postaci

$$\nabla \cdot (\lambda_\varepsilon(x, y) \nabla u_\varepsilon(x, y)) = f(x, y)$$

ze zmiennym współczynnikiem $\lambda_\varepsilon(x, y)$, gdzie $\varepsilon$ jest charakternym wymiarem jego zmienności (na przykład, wymiar wtrącenia). Czy istnieje granica $u(x, y) = \lim_{\varepsilon \to 0} u_\varepsilon(x, y)$ i jakie równanie spełnie funkcja $u(x, y)$?

Przy pewnych założeniach granica ta istnieje i spełnia równanie

$$\nabla \cdot (\Lambda \cdot \nabla u(x, y)) = f(x, y),$$

gdzie tensor $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_e^x & \lambda_e^{xy} \\ \lambda_e^{xy} & \lambda_e^y \end{pmatrix}$ nazywa się tensorem efektywnym.

Podstawowe poprzednie publikacje:

Lord Rayleigh, On the influence of obstacles arranged in rectangular order upon the properties of a medium. Phil. Mag. 34 (1892) 481-502.

R.C. McPhedran, Transport properties of cylinder pairs and the square array of cylinders. Proc. R. Soc .Lond. A408 (1986) 31-43.

R.C. McPhedran, G. Milton, Transport properties of touching cylinder pairs and of the square array of touching cylinders. Proc. R. Soc. Lond. (1987) A411, 313-326.

R.C. McPhedran, L. Poladian, G. Milton, Asymptotic studies of closely spaced, highly conducting cylinders. Proc. R. Soc. Lond A415 (1988) 185-196.

W.T. Perrins, D.R. McKenzie, R.C. McPhedran, Transport properties of regular array of cylinders. Proc. R. Soc. Lond. A369 (1979) 207-225.

A.S. Sangani, C. Yao, Transport properties in random arrays of cylinders. 1. Thermal conduction. Phys. Fluids 31 (1988) 2426-2434.

D.J. Bergman, The dielectric constant of a composite material - a problem in classical physics. Phys. Reports C43 (1983) 378-407.

D.J. Bergman, K.J. Dunn, Bulk effective dielectric constant of a composite with a periodic microgeometry.Phys. Rev. B45 (1992) 13262-13271.

# 3. Warunek kontaktu doskonałego

Warunki sprzężenia: $u^+ = u^-$, $\lambda^+ \frac{\partial u^+}{\partial n} = \lambda^- \frac{\partial u^-}{\partial n}$ na brzegu wtrącenia $(\lambda^+ = 1)$

Wprowadzamy potencjał zespolony: $u(z) = \mathrm{Re}(\phi(z) + z)$ w osnowie

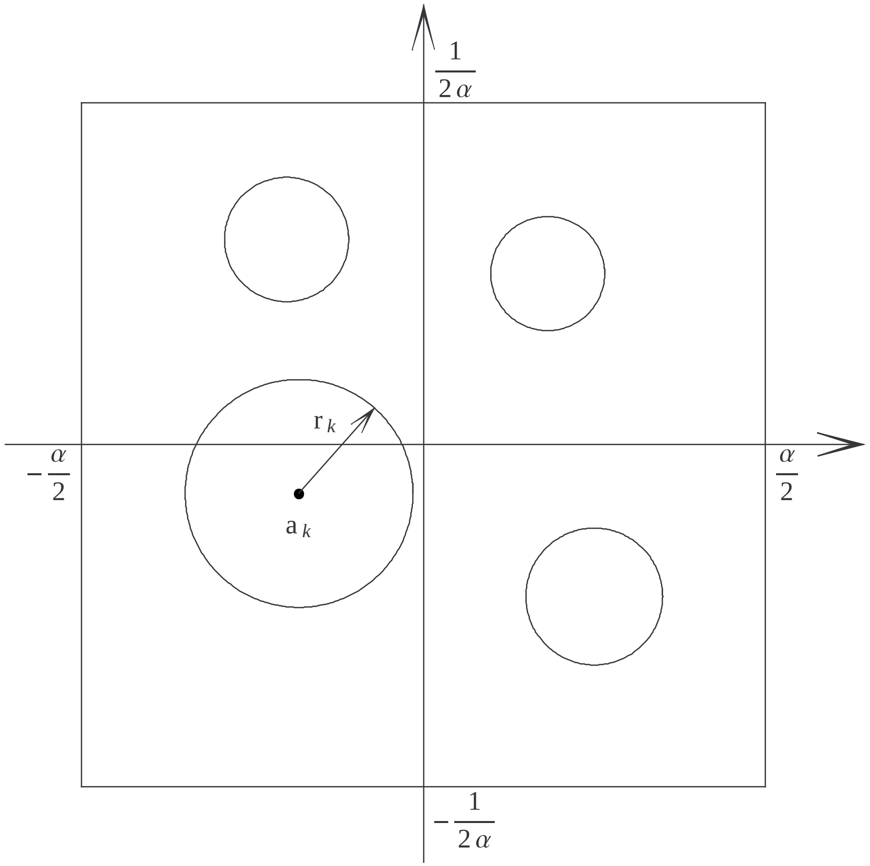
$u(z) = \frac{2}{1+\lambda^-} \mathrm{Re}\, \phi_k(z)$ we wtrąceniu z numerem k.

Warunki sprzężenia w nomenklaturze potencjałów zespolonych ($\mathbb{R}$ - liniowe zagadnienie)

$$\phi(t) = \phi_k(t) - \rho\,\overline{\phi_k(t)} - t, \quad |\,t - a_k\,| = r_k,\ k = 1, 2, \ldots, n \qquad (R)$$

# 4. Zagadnienia brzegowe w klasie funkcji periodycznych i równania funkcyjne

Komórka podstawowa:



Równania: $\Delta u = 0$ (równanie Laplace'a)

Warunki sprzężenia: $u^{+} = u^{-}$, $\frac{\partial u^{+}}{\partial n} = \lambda^{-} \frac{\partial u^{-}}{\partial n}$ na brzegu wtrącenia

Warunki quasi-okresowości: $u(z+\alpha) = u(z) + \alpha$, $u(z + 1/i\alpha) = u(z)$.

$\mathbb{R}$- liniowe zagadnienie w klasie funkcji periodycznych:

$$\phi(t) = \phi_k(t) - \rho_k \overline{\phi_k(t)}, \quad |t - a_k| = r_k,\ k = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.1}$$

**Redukcja $\mathbb{R}$- liniowego zagadnienia (3.1) w przypadku siatki kwadratowej ($\alpha = 1$) do układu równań funkcyjnych:**

**1.** Zamiast (3.1) rozpatrujemy zagadnienie na pochodne $\psi(z) = \frac{d\phi(z)}{dz}$, $\psi_m(z) = \frac{d\phi_m(z)}{dz}$

$$\psi(t) = \psi_k(t) + \rho_k \left(\frac{r_k}{z - a_k}\right)^2 \overline{\psi_k(t)}, \quad |t - a_k| = r_k,\ k = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.1'}$$

**2.** Wprowadzamy funkcję

$$\Phi(z) = \psi_m(t) - \sum_{k=1}^{n} \rho_k \sum_{m_1, m_2}{}' \left(\frac{r_k}{z - a_k - \alpha m_1 - i\alpha^{-1} m_2}\right)^2 \overline{\psi_k\left(\frac{r_k^2}{\overline{z - a_k - \alpha m_1 - i\alpha^{-1} m_2}} + a_k\right)},$$
$$|z - a_m| \le r_m,\ m = 1, 2, \ldots, n,$$

$$\Phi(z) = \psi(t) - \sum_{k=1}^{n} \rho_k \sum_{m_1, m_2} \left(\frac{r_k}{z - a_k - \alpha m_1 - i\alpha^{-1} m_2}\right)^2 \overline{\psi_k\left(\frac{r_k^2}{\overline{z - a_k - \alpha m_1 - i\alpha^{-1} m_2}} + a_k\right)} \quad z \in D.$$

**3.** Na każdym okręgu $\partial D_m$ przy pomocy $(3.1^{/})$ obliczamy skok

$$\Delta_m \Phi(t) = \lim_{t \to z \in D_m} \Phi(z) - \lim_{t \to z \in D_m} \Phi(z) = \psi_m(t) + \rho_k \left(\frac{r_m}{z - a_m}\right)^2 \overline{\psi_m(t)} - \psi(t) = 0 .$$

Na mocy zasady przedłużania anlitycznego oraz twierdzenia Liouville'a otzrymujemy, że $\Phi(z) = c\,-$ constant.

**4.** Z równości $\Phi(z) = c$ w kołach $|z - a_m| \leq r_m$ uzyskujemy układ równań funkcyjnych

$$\psi_m(z) = \sum_{k=1}^{n} \rho_k \sum_{m_1, m_2}{}^{/} \left(\frac{r_k}{z - a_k - \alpha\, m_1 - i\, \alpha^{-1}\, m_2}\right)^2 \overline{\psi_k \left(\frac{r_k{}^2}{\overline{z - a_k - \alpha\, m_1 - i\, \alpha^{-1}\, m_2}} + a_k\right)} + c,$$

$$|z - a_m| \leq r_m, \; m = 1, 2, \ldots, n. \qquad (3.2)$$

<u>Uwaga.</u> Dalej ustalamy $c = 1$.

## Konstruktywne rozwiązanie układu równań funkcyjnych (3.2):

Ustalmy $k \neq m$. Niech $\psi_k(z) = \sum_{s=1}^{\infty} \psi_{ks}(z - a_k)^s$ – szereg Taylora. Wtedy

$$\sum_{m_1, m_2} \left(\frac{r_k}{z - a_k - \alpha\, m_1 - i\, \alpha^{-1}\, m_2}\right)^2 \overline{\psi_k\left(\frac{r_k^2}{\overline{z - a_k - \alpha\, m_1 - i\, \alpha^{-1}\, m_2}} + a_k\right)} =$$

$$\sum_{m_1, m_2} \left(\frac{r_k}{z - a_k - \alpha\, m_1 - i\, \alpha^{-1}\, m_2}\right)^2 \overline{\sum_{s=1}^{\infty} \psi_{k\,s} \left(\frac{r_k^2}{\overline{z - a_k - \alpha\, m_1 - i\, \alpha^{-1}\, m_2}}\right)^s} =$$

$$\sum_{s=1}^{\infty} \overline{\psi_{k\,s}}\, r_k^{2\,(s+1)} \sum_{m_1, m_2} (z - a_k - \alpha m_1 - i\alpha^{-1}\, m_2)^{-(s+2)} = \sum_{s=1}^{\infty} \overline{\psi_{k\,s}}\, r_k^{2\,(s+1)}\, E_{s+2}(z - a_k)$$

# 5. Szeregi Eisensteina-Rayleigha i funkcje Eisensteina

Sumowanie według Eisensteina (1848) (patrz A. Weil, 1976)

$$\sum_{m_1, m_2 \in \mathbb{Z}} := \lim_{M\to\infty} \lim_{N\to\infty} \sum_{m_2=-M}^{M} \sum_{m_1=-N}^{N}$$

Rozważmy szeregi

$$S_{2k} = \sum_{m_1, m_2}{}^{/} \frac{1}{\left(\alpha m_1 + i\, \alpha^{-1} m_2\right)^{2k}}, \quad k = 1, 2, \dots \tag{5.1}$$

wprowadzone przez Eisensteina (1864) i Rayleigha (1892).

Szybkie wzory obliczeniowe

$$S_2 = \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^2 \left(\frac{1}{3} - 8 \sum_{s=1}^{\infty} \frac{m\, h^{2m}}{1-h^{2m}}\right), \quad \text{gdzie } h = \exp\left(-\frac{\pi}{\alpha^2}\right),$$

$$S_4 = \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^4 \left(\frac{1}{15} + 16 \sum_{s=1}^{\infty} \frac{m^3\, h^{2m}}{1-h^{2m}}\right),$$

$$S_6 = \frac{1}{15} \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^6 \left(\frac{2}{63} - 16 \sum_{s=1}^{\infty} \frac{m^5\, h^{2m}}{1-h^{2m}}\right),$$

$$S_{2k} = \frac{3}{(2k+1)(2k-1)(k-3)} \sum_{m=2}^{k-2} (2m-1)(2k-2m-1) S_{2m} S_{2(k-m)}, \quad k = 4, 5, \dots$$

W przypadku siatki kwadratowej ($\alpha = 1$) mamy $S_2 = \pi$.

## Funkcje Eisensteina:

$$E_k(z) = \sum_{m_1, m_2} \frac{1}{\left(z - \alpha m_1 - i\, \alpha^{-1}\, m_2\right)^k}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Związek z eliptycznymi funkcjami:

$$E_1(z) = \zeta(z) - S_2\, z, \quad E_2(z) = \wp(z) + S_2, \quad E_{k+1}(z) = -\frac{1}{k}\, E_k^{/}(z), \; k = 2, 3, \ldots,$$

gdzie $\zeta(z)$ i $\wp(z)$ są funkcjami Weierstrassa.

$$\psi_m(z) = \sum_{k=1}^{n} \rho_k \sum_{m_1, m_2}{}^{/} \left(\frac{r_k}{z - a_k - m_1 - i\, m_2}\right)^2 \overline{\psi_k\left(\frac{r_k}{z - a_k - m_1 - i\, m_2} + a_k\right)} + 1,$$

$$|\, z - a_m \,| \le r_m, \; m = 1, 2, \ldots, n, \qquad (3.2)$$

Rozpatrzmy równania funkcyjne (3.2) w przestrzeni Banacha $\mathcal{B}$ funkcji $\Psi(z) = \psi_m(z)$ analitycznych w każdym kole $|\, z - a_m \,| < r_m$ i ciągłych w $|\, z - a_m \,| \le r_m$ $(m = 1, 2, \ldots, n)$ z normą $||\,\Psi\,|| = \max_{1 \le m \le n} \max_{|z - a_m| \le r_m} |\,\psi_m(z)\,|$.

Twierdzenie 1. Równanie (3.2) posiada jedno rozwiązanie w pewnej przestrzeni Banacha $\mathcal{B}$. Rozwiązanie to można znaleźć przez metodę kolejnych przybliżeń zbieżną w tej przestrzeni.

Twierdzenie 2. Niech $\rho_k = \rho,\ r_k = r$. Rozwiązanie $\psi_m(z)$ układu równań funkcyjnych (3.2) można przedstawić w postaci szeregu

$$\psi_m(z) = \sum_{q=0}^{\infty} \psi_m^{(q)}(z)\, r^{2q}, \tag{5.2}$$

gdzie

$$\psi_m^{(0)}(z) = 1, \qquad \psi_m^{(q+1)}(z) = \rho \sum_{k=1}^{n} \left(\overline{\psi_{0\,k}^{(q)}}\, E_2{}^*(z-a_k) + \overline{\psi_{1\,m}^{(q-1)}}\, E_3{}^*(z-a_k) + \ldots + \overline{\psi_{q,k}^{(0)}}\, E_{q+2}{}^*(z-a_k)\right),$$

$$m = 1, 2, \ldots, n; \quad q = 0, 1, \ldots. \tag{5.3}$$

Liczba $\psi_{j\,k}^{(q)}$ jest $j-$ym współczynnikiem szeregu Taylora funkcji $\psi_k^{(q)}(z)$. Szereg (5.2) i przybliżenia (5.3) są zbieżne jednostajnie we wszystkich kołach $|z-a_m| \le r_m$.

Uwaga: $E_p{}^*(z-a_k) := E_p(z-a_k)$, jeśli $k \ne m$; $E_p{}^*(z-a_k) := E_p(z-a_k) - \frac{1}{(z-a_k)^p}$, jeśli $k = m$.

# 6. Tensor efektywnej przewodności $\Lambda_e = \begin{pmatrix} \lambda_e^x & \lambda_e^{xy} \\ \lambda_e^{xy} & \lambda_e^y \end{pmatrix}$

Definicja współrzędnych $\lambda_e^x$ i $\lambda_e^{xy}$ tensora $\Lambda_e$:

$$\lambda_e^x = \int_D \frac{\partial u}{\partial x}\, dx\, dy + \sum_{k=1}^n \lambda_k \int_{D_k} \frac{\partial u}{\partial x}\, dx\, dy, \quad \lambda_e^{xy} = \int_D \frac{\partial u}{\partial y}\, dx\, dy + \sum_{k=1}^n \lambda_k \int_{D_k} \frac{\partial u}{\partial y}\, dx\, dy. \quad (6.1)$$

Wzór (6.1) w nomenklaturze potencjałów zespolonych:

$$\lambda_e^x - i\lambda_e^{xy} = 1 + 2 \sum_{k=1}^n \rho_k\, v_k\, \psi_k(a_k),$$

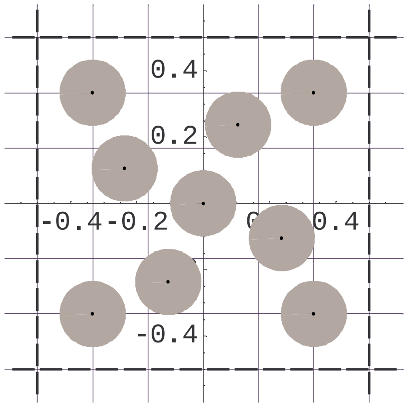
gdzie $v_k = \pi\, r_k^2$ jest koncentracją wtrąceń o przewodności $\lambda_k$. Wprowadźmy wielkości

$$\mathbb{X}[p_1 \ldots p_M] = \sum_{m,k_0,\ldots,k_M}^{n} E_{p_1}(a_m - a_{k_1})\, \overline{E_{p_2}(a_{k_1} - a_{k_2})} \ldots \mathbb{C}^{M-1} E_{p_M}(a_{k_{M-1}} - a_{k_M}),$$

gdzie $\mathbb{C}: a + ib \mapsto a - ib$ jest operatorem sprzężenia.

Rozpatrzmy przypadek jednakowych wtrąceń ($\rho_k = \rho$, $r_k = r$) tworzących układ makroskopowo izotropowy ($\lambda_e^x = \lambda_e^y = \lambda_e$, $\lambda_e^{xy} = 0$). Wtedy

$$\lambda_e = 1 + 2\,\rho\,v \sum_{p=1}^{\infty} A[\![p]\!]\,v^{p-1}$$




$A[\![2]\!] = \frac{\rho}{\pi\,n^2}\,\mathbb{X}[2]$

1. $\rho$

$A[\![3]\!] = \frac{\rho^2}{\pi^2\,n^3}\,\mathbb{X}[2, 2]$

2.31326 $\rho^2$

$$A[\![4]\!] = \frac{1}{\pi^3 n^4} \left(-2 \rho^2 \mathbb{X}[3, 3] + \rho^3 \mathbb{X}[2, 2, 2]\right)$$

$$1.02069 \rho^2 + 3.62652 \rho^3$$

$$A[\![5]\!] = \frac{1}{\pi^4 n^5} \left(6 \rho^2 \mathbb{X}[4, 4] + 2 \rho^3 (\mathbb{X}[3, 3, 2] + \mathbb{X}[2, 3, 3]) + \rho^4 \mathbb{X}[2, 2, 2, 2]\right)$$

$$4.21634 \rho^2 - 2.04138 \rho^3 + 8.24068 \rho^4$$

$$A[\![6]\!] = \frac{1}{\pi^5 n^6} \left(-24 \rho^2 \mathbb{X}[5, 5] + 6 \rho^3 (\mathbb{X}[4, 4, 2] + \mathbb{X}[3, 4, 3] + \mathbb{X}[2, 4, 4]) - 2 \rho^4 (\mathbb{X}[3, 3, 2, 2] + \mathbb{X}[2, 3, 3, 2] + \mathbb{X}[2, 2, 3, 3]) + \rho^5 \mathbb{X}[2, 2, 2, 2, 2]\right)$$

$$7.73167 \rho^2 + 8.43267 \rho^3 + 7.24832 \rho^4 + 14.5795 \rho^5$$

$$A[\![7]\!] = \frac{1}{\pi^6 n^7} \Big(120 \rho^2 \mathbb{X}[6, 6] - 24 \rho^3 (\mathbb{X}[2, 5, 5] + \mathbb{X}[3, 5, 4] + \mathbb{X}[4, 5, 3] + \mathbb{X}[5, 5, 2]) + 6 \rho^4 (\mathbb{X}[2, 2, 4, 4] + \mathbb{X}[2, 3, 4, 3] + \mathbb{X}[3, 3, 3, 3] + \mathbb{X}[2, 4, 4, 2] + \mathbb{X}[3, 4, 3, 2] + \mathbb{X}[4, 4, 2, 2]) - 24 \rho^5 (\mathbb{X}[2, 2, 2, 3, 3] + \mathbb{X}[2, 2, 3, 3, 2] + \mathbb{X}[2, 3, 3, 2, 2] + \mathbb{X}[3, 3, 2, 2, 2]) + \rho^6 \mathbb{X}[2, 2, 2, 2, 2]\Big)$$

$$7.15993 \rho^2 + 15.4633 \rho^3 + 33.1164 \rho^4 + 181.633 \rho^5 + 31.1353 \rho^6$$

$$\lambda_e = 1 + 2 \rho v \sum_{p=1}^{7} A[\![p + 1]\!] v^{p-1}$$

$$\lambda_e = 1 + 2 v \rho + 2. v^2 \rho^2 + 4.62652 v^3 \rho^3 + v^4 (2.04138 \rho^3 + 7.25304 \rho^4) + v^5 (8.43267 \rho^3 - 4.08276 \rho^4 + 16.4814 \rho^5) + v^6 (15.4633 \rho^3 + 16.8653 \rho^4 + 14.4966 \rho^5 + 29.159 \rho^6) + v^7 (14.3199 \rho^3 + 30.9267 \rho^4 + 66.2327 \rho^5 + 363.267 \rho^6 + 62.2707 \rho^7)$$

**Otwarty problem:** Czy istnieje prosta reguła obliczenia A⟦$k$⟧?

Wskaźniki $p_1\ p_2\ ...\ p_M$ splotów $X_{p_1\ p_2 ...\ p_M}$:

2

22

33 222

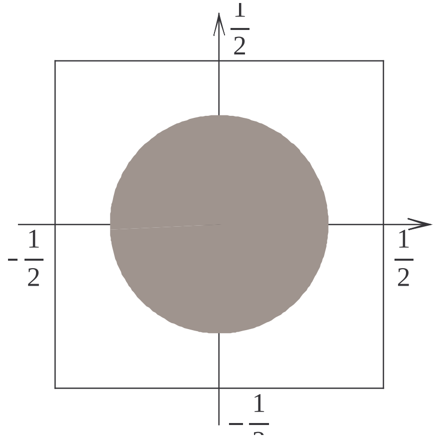
44 332 233 2222

55 442 343 244 3322 2332 2233 22222

66 255 354 453 552 2244 2343 3333 2442 3432 4422 22233 22332 23322 33222 222222

# Regularny układ:

Siatka kwadratowa z jednym wtrąceniem w komórce



$$\lambda_e = 1 + 2\,\rho v \sum_{m=0}^{\infty} A_m(r^2)\,\rho^m\,r^{2m},$$

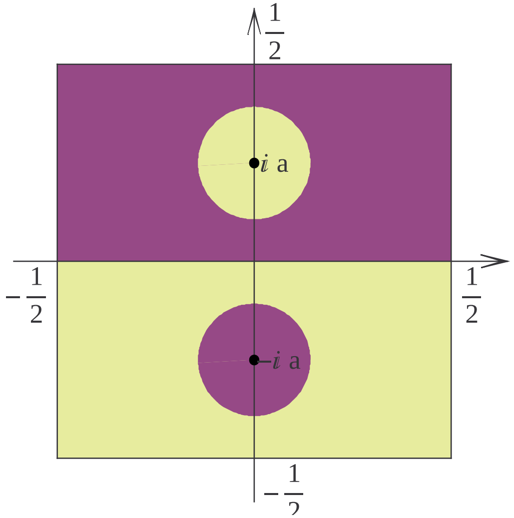
gdzie

$$A_1(x) = \alpha^{-1}\,2\,\zeta(\alpha/2),\; A_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_{2n}^{(2)}\,S_{2(n+1)}\,x^{2n},$$

$$A_m(x) = \sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty}\ldots\sum_{n_{m-1}=0}^{\infty} \sigma_{2n_1}^{(2n_2+2)}\,\sigma_{2n_2}^{(2n_3+2)}\ldots\sigma_{2n_{m-2}}^{(2n_{m-1}+2)}\,\sigma_{2n_{m-1}}^{(2)}\,S_{2(n_1+1)}\,x^{2(n_1+n_2\ldots+n_{m-1})},$$

$$\sigma_{2l}^{(2n)} = C_{2l+2n-1}^{2l}\,S_{2(n+l)}.$$

# Materiały kompozytowe laminarne - włókniste:




$$\lambda_e^x \approx \lambda_0^x\left(1 - 4\,\rho\pi\, r^2 - 4\,\rho^3(2\,\rho + 1)\,\pi\, r^4\,\mathrm{Re}\wp(2\,i\,a)\right),$$

gdzie $\lambda_0^x = \frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}$, $\wp(z)$ - funkcja Weierstrassa;

$$\lambda_e^y \approx \lambda_0^y\left(1 + 4\,\rho\pi\, r^2 + 4\,\rho^3(2\,\rho + 1)\,\pi\, r^4\,\mathrm{Re}\wp(2\,i\,a)\right),\ \text{gdzie}\ \lambda_0^y = \frac{2}{1/\lambda_1+1/\lambda_2}\,.$$

Wektorowe równanie funkcyjne:

$$\psi_m(z) = \sum_{k=1}^{n} \Omega_k \sum_{m_1, m_2}{}' \left(\frac{r_k}{z-a_k-m_1-i\,m_2}\right)^2 \overline{\psi_k\left(\frac{r_k}{z-a_k-m_1-i\,m_2} + a_k\right)} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$|\,z - a_m\,| \leq r_m,\ \ m = 1, 2, \ \ldots, n,$$

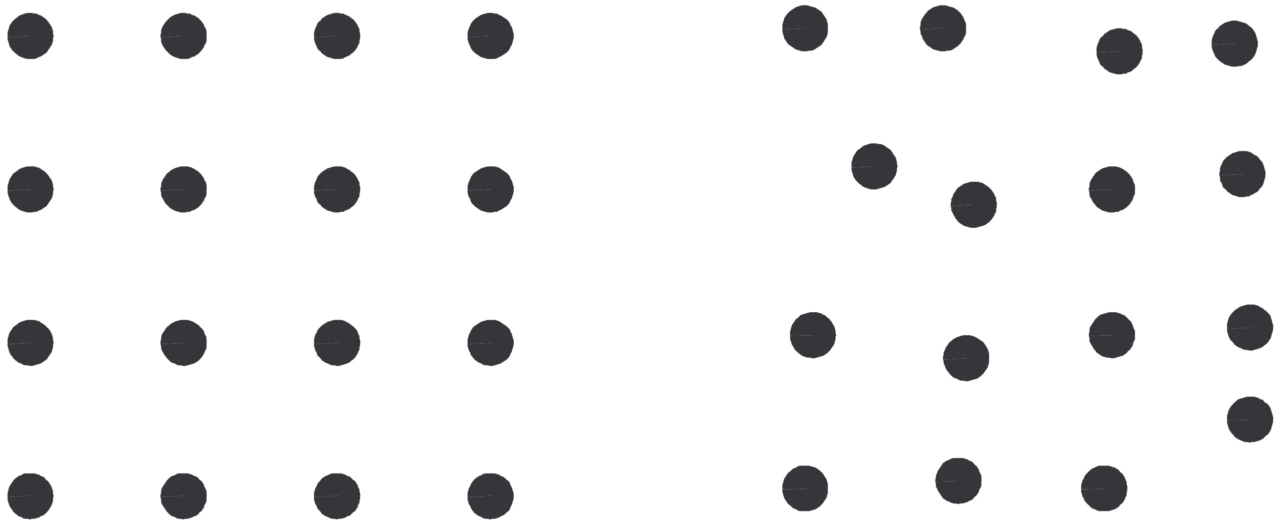
# Extremalna własność układu regularnego a losowy układ wtrąceń:

Ekstremalne własności układu heksagonalnego dla małych udziałów objętościowych ($v \sim 0$) zbadane w artykule Kozlov S.M. (1989), Geometrical aspects of averaging. Russian Math. Surveys 44:2, 91-144.

**Otwarty problem:** Czy układ heksagonalny posiada ekstremalne własności dla dowolnych $v$?

Rozpatrzmy środki wtrąceń $a_k$ jako zmienne losowe podlegające pewnemu rozkładu probabilistycznemu.

Model "shaking geometry" wprowadzony w artykule [Berlyand L., Mityushev V. Generalized Clausius-Mossotti formula for random composite with circular fibers, J Statist. Phys. v.102, N 1/2, 2001, 115-145] dotyczy jednostajnego rozkładu zmiennej losowej $a_k$ w małym kwadracie. W tym modelu układ regularny posiada lokalne ekstremalne własności.



**Otwarty problem:** Zbadać losowe równanie funkcyjne. Oszacować $\lambda_e$ dla "non-overlapping model".

# 7. Przenikalność cieczy lepkiej

Równanie: $\Delta w = 1$ (równanie Poissona) (7.1)

$w(x,\ y)$ periodyczna (7.2)

$w(x,\ y) = 0$ na $\partial D$ (7.3)

Zagadnienie (6.1)-(6.3) można sprowadzić do zagadnienia względem harmonicznej funkcji $u(z)$:

$\Delta u = 0$ (7.4)

$u(x,\ y)$ periodyczna (7.5)

$$u(x,\ y) = -\frac{1}{4\pi}\left(S_2\, x^2 - (2\pi - S_2)\, y^2\right) + \frac{1}{2\pi n} \ln|\sigma(z - a_k)| \quad \text{na} \quad \partial D \qquad (7.6)$$

Przenikalność wzdłuż włókien określona wzorem $K = -\int_D w(x,\ y)\, d\sigma$

Konstruktywny wzór: $$K = -\left(\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{\ln r_k}\right)^{-1} \left(1 - \sum_{\mathbf{s},\mathbf{j}} c_{\mathbf{s},\mathbf{j}} \frac{r_1^{2 s_1}\, r_2^{2 s_2} \ldots r_n^{2 s_n}}{\ln^{t_1} r_1\ \ln^{t_2} r_2 \ldots \ln^{t_n} r_n}\right),$$

$\boldsymbol{s} = (s_1, s_2,\ \ldots,\ s_n)$, $\boldsymbol{t} = (t_1, t_2,\ \ldots,\ t_n)$.

**Otwarty problem:** Zagadnienia typu

$$\mathbf{L}w = 0, \qquad (7.1^{/})$$

$$w(x,\ y) \text{ periodyczna}, \qquad (7.2^{/})$$

$$w(x,\ y) = f(x,\ y) \text{ dla } (x,\ y) \in \partial D, \qquad (7.3^{/})$$

gdzie **L** - operator różniczkowy niekonecznie liniowy.