МИНВУЗ СССР
РЕДКОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА
"ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ"
раздел "МАТЕМАТИКА"

УДК 517.544.8

В.В.Митюшев

О РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ $\mathbb{R}$ -ЛИНЕЙНОГО СОПРЯЖЕНИЯ (ЗАДАЧИ МАРКУШЕВИЧА) НА ТОРЕ И ЦИЛИНДРЕ

КАЗАНЬ - 1987

притягивающей [12, с. 18].

По схеме, изложенной в работе [8], система функциональных уравнений (1.7) сводится к уравнению со сжимающим оператором типа Вольтера, дополненному конечной системой линейных алгебраических уравнений. Таким образом, подставляя ряды Тейлора неизвестных функций в систему (1.7) (можно подставлять и в систему (1.5)) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z, получим квазирегулярную бесконечную систему линейных алгебраических уравнений [13] *).

По функциям $\varphi_p(z)$ ($p = 1, 2, \ldots, n$) легко находится функция $\varphi(z)$. Из определения функции $\Phi(z)$ следует, что функция $\varphi(z)$ является двоякопериодической.

§ 2. Смешанная краевая задача для прямоугольника

Результаты предыдущего параграфа применяются к одной смешанной краевой задаче.

На границе прямоугольника $\mathcal{D}$ задана мнимая часть некоторой функции $\varphi(z)$, аналитической в $\mathcal{D}$ за исключением конечного числа непересекающихся кругов $\mathcal{D}_p$, на границе которых задано условие ($\mathbb{R}$) с постоянными коэффициентами, связывающее функции $\varphi(z)$ и $\varphi_p(z)$ ($p = 1, 2, \ldots, n$). Функция $\varphi_p(z)$ ищется аналитической в круге $\mathcal{D}_p$.

Для краткости изложения рассмотрим случай $n = 1$.

Итак, требуется найти функции $\varphi(z)$ и $\varphi_1(z)$, аналитические в областях $\mathcal{D}_0 := \{z \in \mathbb{C}, a_1 < \operatorname{Re} z < b_1, a_2 < \operatorname{Im} z < b_2\} \setminus \overline{\mathcal{D}}_1$, $\mathcal{D}_1 :=$

---

*) Квазирегулярность понимается над полем действительных чисел, так как в систему входят и сопряженные значения коэффициентов α_p^i.

$=\{z\in\mathbb{C},\ |z|<r\}$ и непрерывные в замыканиях соответствующих областей, по условиям:

$$\varphi(t)=a\varphi_1(t)+b\overline{\varphi_1(t)}+c(t),\ |t|=r,\ \varphi(t)-\overline{\varphi(t)}=f(t), t\in\partial\mathcal{D} \quad (2.I)$$

Обозначим через Γ_1, Γ_2, Γ_3, Γ_4 стороны прямоугольника $\mathcal{D}$ ($\partial\mathcal{D}:=\bigcup_{k=1}^{4}\Gamma_k$). Все обозначения отмечены на рисунке 3.1

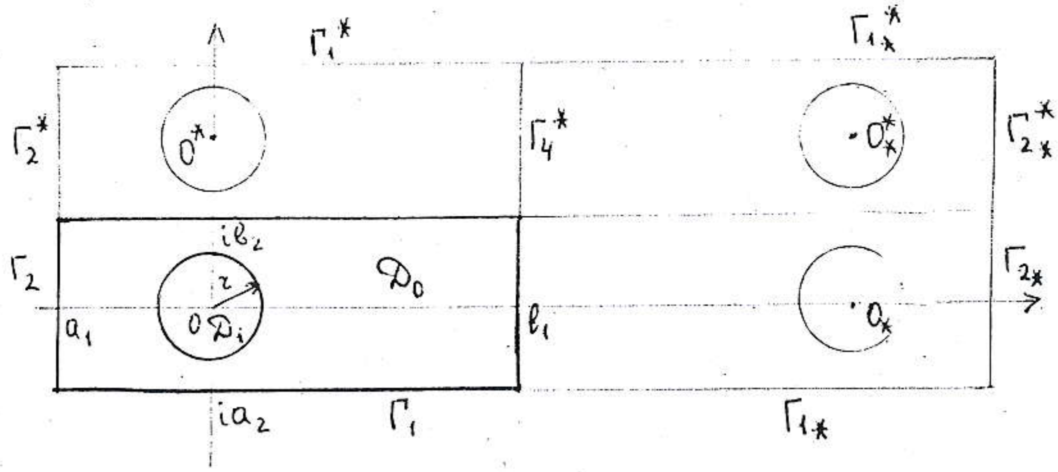

Рис. 3

Введем новую неизвестную функцию $\Phi(z)=\varphi(z)-g(z)$ в области $\mathcal{D}_0$. Функция $g(z)$ аналитична в прямоугольнике $\mathcal{D}$ и удовлетворяет условию

$$g(t)-\overline{g(t)}=f(t),\ t\in\partial\mathcal{D},$$

и выписывается в явном виде [I7]. Задача (2.I) примет вид

$$\Phi(t)=a\varphi_1(t)+b\overline{\varphi_1(t)}+c_1(t),\ |t|=r,\ \Phi(t)-\overline{\Phi(t)}=0,\ t\in\partial\mathcal{D}, \quad (2.2)$$

где $c_1(t):=c(t)+g(t)$. Рассмотрим преобразования симметрии относительно сторон Γ_3 и Γ_4 прямоугольника $\mathcal{D}$ (рис. 3). Пусть A – некоторое множество точек на плоскости, тогда через A^* обозначим множество, симметричное множеству A относительно стороны Γ_3, а через A_* обозначим множество, симметричное A относительно стороны Γ_4. На отрезках Γ_3 и Γ_4 имеют место равенства

$$t=\bar{t}+2b_2 i,\ t\in\Gamma_3,\quad t=-\bar{t}+2b_1,\ t\in\Gamma_4. \qquad (2.3)$$

Пользуясь симметрией, построим прямоугольники $\mathcal{D}^*$, $\mathcal{D}_*$ и $\mathcal{D}^*_*$. Введем функции

$$\varphi_1^*(z)=\overline{\varphi_1(\bar{z}+2ib_2)},\ z\in\mathcal{D}_1^*,$$

$$\varphi_{1*}(z)=\overline{\varphi_1(-\bar{z}+2b_1)},\ z\in\mathcal{D}_{1*},$$

$$\varphi_{1*}^*(z)=\varphi_1(-z+2(b_1+ib_2)),\ z\in\mathcal{D}_{1*}^*,$$

аналитические в областях определения. В силу второго равенства (2.2) функция $\Phi(z)$ аналитически продолжима по симметрии в области $\mathcal{D}_0^*$, $\mathcal{D}_{0*}$, а затем и в область $\mathcal{D}_{0*}^*$ после второй симметрии. В силу соотношений (2.3), условия (2.2) перепишем в виде

$$\begin{aligned}
&\Phi(t)=a\varphi_1(t)+b\overline{\varphi_1(t)}+c_1(t),\ |t|=r,\\
&\Phi(t)=\bar{a}\varphi_{1*}(t)+\bar{b}\overline{\varphi_{1*}(t)}+\overline{c_1(t)},\ |t-0_*|=r,\\
&\Phi(t)=\bar{a}\varphi_1^*(t)+\bar{b}\overline{\varphi_1^*(t)}+\overline{c_1(t)},\ |t-0^*|=r,\\
&\Phi(t)=a\varphi_{1*}^*(t)+b\overline{\varphi_{1*}^*(t)}+c_1(t),\ |t-0_*^*|=r,
\end{aligned} \qquad (2.4)$$

где, например, точка $z=0_*$ симметрична точке $z=0$ относительно отрезка Γ_4. На сторонах большого прямоугольника, ограниченного отрезками $\Gamma_2\ \Gamma_2^*\ \Gamma_1^*\ \Gamma_{1*}^*\ \Gamma_{2*}^*\ \Gamma_{2*}\ \Gamma_{1*}\ \Gamma_1$ выполняются условия склеивания

$$\Phi(t)=\Phi(t+2i(b_2-a_2)),\ t\in\Gamma_1,\Gamma_{1*};\ \Phi(t)=\Phi(t+2(b_1-a_1)),\ t\in\Gamma_2,\Gamma_2^*, \qquad (2.5)$$

вытекающие из определения функции $\Phi(z)$ в большом прямоугольнике и из второго равенства (2.2). Действительно, например, при $t \in \Gamma_1$

$$\Phi(t+2i(b_2-a_2)) = \overline{\Phi(t+2i(b_2-a_2))} = \overline{\Phi(\bar{t}-2ib_2)} = \overline{\Phi(t)} = \Phi(t).$$

Задача (2.4), (2.5) в предыдущем параграфе была сведена к системе функциональных уравнений. В силу симметрии функций $\Phi(z), \varphi_1(z)$ эту систему можно записать в виде одного уравнения

$$\varphi(z)=\frac{1}{a}\Big\{b\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}^2\\ k\neq(0,0)}}\Big[\overline{\varphi_1\Big(\frac{r^2}{\overline{z-z_0^k}}\Big)}-\bar{\alpha}_0-\bar{\alpha}_1\frac{r^2}{z-z_0^k}-\bar{\alpha}_2\Big(\frac{r^2}{z-z_0^k}\Big)^2+$$

$$+\bar{b}\sum_{k\in\mathbb{Z}^2}\Big[\overline{\varphi_1\Big(\frac{r^2}{\overline{z-z_1^k}}+z_1\Big)}-\bar{\alpha}_0-\bar{\alpha}_1\frac{r^2}{z-z_1^k}-\bar{\alpha}_2\Big(\frac{r^2}{z-z_1^k}\Big)^2\Big]+$$

$$+\bar{b}\sum_{k\in\mathbb{Z}^2}\Big[\overline{\varphi_1\Big(\frac{r^2}{\overline{z-z_2^k}}+z_2\Big)}-\bar{\alpha}_0-\bar{\alpha}_1\frac{r^2}{z-z_2^k}-\bar{\alpha}_2\Big(\frac{r^2}{z-z_2^k}\Big)^2\Big]+ \tag{2.6}$$

$$+b\sum_{k\in\mathbb{Z}^2}\Big[\overline{\varphi_1\Big(\frac{r^2}{\overline{z-z_3^k}}+z_3\Big)}-\bar{\alpha}_0-\bar{\alpha}_1\frac{r^2}{z-z_3^k}-\bar{\alpha}_2\Big(\frac{r^2}{z-z_3^k}\Big)^2\Big]\Big\}+g(z),$$

где $z_0^k=k_1\omega_1+k_2\omega_2$ - значения образов нуля при k -ом сдвиге по решетке, z_1, z_2, z_3 - значения точек O^*, O_* и O_*^*. Уравнение (2.6) аналогично системе (I.5) сводится к квазирегулярной бесконечной алгебраической системе.

§ 3. Задача ($\mathbb{R}$) для круговых областей на цилиндре

Пусть имеется полоса $\mathcal{D}:=\{z\in\mathbb{C},\ a<\operatorname{Im} z<b\}$. Пусть в полосе $\mathcal{D}$ лежат непересекающиеся круги $\mathcal{D}_1:=\{z\in\mathcal{D},\ |z-z_1|<r_1\}$, $\mathcal{D}_2:=\{z\in\mathcal{D},\ |z-z_2|<r_2\}$, ..., $\mathcal{D}_n:=\{z\in\mathcal{D},\ |z-z_n|<r_n\}$. Ообозначим через $\mathcal{D}_0$ дополнение кругов $\overline{\mathcal{D}_i}$,

$\bar{\mathcal{D}}_2, \ldots, \bar{\mathcal{D}}_n$ до полосы $\mathcal{D}$.

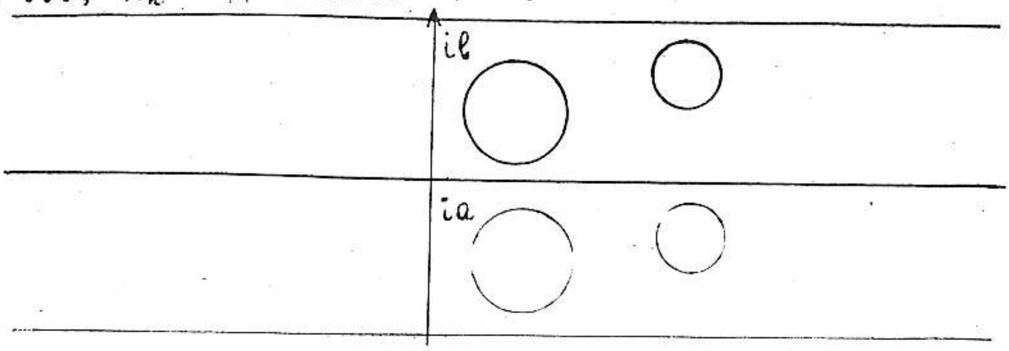

Рис. 4.

Найти функции $\varphi(z), \varphi_1(z), \varphi_2(z), \ldots, \varphi_n(z)$, аналитические в областях $\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \ldots, \mathcal{D}_n$ соответственно и непрерывные в замыканиях соответствующих областей, по следующим условиям

$$\varphi(t) = a_1\varphi_1(t) + b_1\overline{\varphi_1(t)} + c_1(t), \quad |t - z_1| = r_1,$$

$$\varphi(t) = a_2\varphi_2(t) + b_2\overline{\varphi_2(t)} + c_2(t), \quad |t - z_2| = r_2, \qquad (3.1)$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\varphi(t) = a_n\varphi_n(t) + b_n\overline{\varphi_n(t)} + c_n(t), \quad |t - z_n| = r_n,$$

$$\varphi(t) = \varphi(t + iL), \quad \operatorname{Im} t = a \quad (L := b - a) \qquad (3.2)$$

Представим функцию $c_p(t)$, $|t - z_p| = r_p$ $(p = 1, 2, \ldots, n)$ в виде разности предельных значений функций, аналитических внутри круга $|z - z_p| < r_p$ и на цилиндре $\mathcal{D}$ вне этого круга [II]

$$c_p(t) = c_p^+(t) - c_p^-(t), \quad |t - z_p| = r_p, \quad p = 1, 2, \ldots, n. \qquad (3.3)$$

Введем на цилиндре $\mathcal{D}$ функцию

$$
\Phi(z)=\begin{cases}
\varphi(z)-\sum\limits_{p=1}^{n} b_p\Big\{\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}\Big[\overline{\varphi_p\Big(\frac{r_p^2}{\overline{z-ikL-z_p}}+\bar z_p\Big)}\Big]-\bar\alpha_0^p-\\
\quad-\bar\alpha_1^p\,\frac{r_p^2}{z-ikL-z_p}\Big]\Big\}+\sum\limits_{p=1}^{n} c_p(z),\quad z\in D_0,\\
a_1\varphi_1(z)-\sum\limits_{p=1}^{n} b_p\Big\{\sum\limits_{\substack{k=-\infty\\ k\neq 0 \text{ при } p=1}}^{\infty}\Big[\overline{\varphi_p\Big(\frac{r_p^2}{\overline{z-ikL-z_p}}+\bar z_p\Big)}-\bar\alpha_0^p-\\
\quad-\bar\alpha_1^p\,\frac{r_p^2}{z-ikL-z_p}\Big]\Big\}+b_1\Big(\bar\alpha_0^1+\bar\alpha_1^1\,\frac{r_1^2}{z-z_1}\Big)+\sum\limits_{p=1}^{n} c_p(z),\\
\qquad z\in D_1,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
a_n\varphi_n(z)-\sum\limits_{p=1}^{n} b_p\Big\{\sum\limits_{\substack{k=-\infty\\ k\neq 0 \text{ при } p=n}}^{\infty}\Big[\overline{\varphi_p\Big(\frac{r_p^2}{\overline{z-ikL-z_p}}+\bar z_p\Big)}-\bar\alpha_0^p-\\
\quad-\bar\alpha_1^p\,\frac{r_p^2}{z-ikL-z_p}\Big]\Big\}+b_1\Big(\bar\alpha_0^n+\bar\alpha_1^n\,\frac{r_n^2}{z-z_n}\Big)+\sum\limits_{p=1}^{n} c_p(z),\\
\qquad z\in D_n.
\end{cases}
$$

Здесь числа α_m^p являются коэффициентами рядов Тейлора неизвестных функций в окрестности точки $z=z_p$:

$$\varphi_p(z)=\sum_{m=0}^{\infty}\alpha_m^p\,(z-z_p)^m\,,\quad p=1,2,\ldots,n.$$

Бесконечная сумма, фигурирующая в определении функции $\Phi(z)$, сходится, так сходится абсолютно и равномерно ряд

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{m=2}^{\infty}\bar\alpha_m^p\,\frac{r_p^{2m}}{(\overline{z-ikL-z_p})^m}\,,\quad |z-ikL-z_p|>r_p',$$

где r'_p - любое число, большее r_p. Покажем сходимость последнего ряда. Введем обозначение $W = W_1 + iW_2 := z - z_p$.

$$\left| \sum_{m=2}^{\infty} \overline{\alpha_m^p} r_p^{2m} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(z-ikL-z_p)^m} \right| \leq \sum_{m=2}^{\infty} r_p^{2m} |\alpha_m^p| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{|z-ikL-z_p|^m} =$$

$$= r_p^{2\cdot 2} |\alpha_2^p| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{W_1^2+(Lk+W_2)^2} + r_p^{2\cdot 3} |\alpha_3^p| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(W_1^2+(Lk+W_2)^2)^{\frac{3}{2}}} +$$

$$+ \ldots \leq r_p^4 S \left(|\alpha_2^p| + \frac{r_p^2}{r'_p} |\alpha_3^p| + \ldots \right).$$

Здесь $S = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{W_1^2 + (Lk+W_2)^2}$. Сходимость ряда доказана.

Мероморфность функции $\Phi(z)$ на всем цилиндре $\mathcal{D}$ проверяется также, как и в § I. Отсюда, по обобщенной теореме Лиувилля $\Phi(z) = Q + \sum_{p=1}^{n} \nu_p \operatorname{ctg}(z-z_p)$, $\nu_p = b_p r_p^2 \overline{\alpha_1^p}$, причем $\sum_{p=1}^{n} \nu_p = 0$. Записывая последнее равенство в кругах $\mathcal{D}_\ell$ $(\ell = 1, 2, \ldots, n)$, получим систему функциональных уравнений

$$\varphi_\ell(z) = \frac{1}{a_\ell} \sum_{p=1}^{n} b_p \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\varphi_p \left(\frac{r_p^2}{z-ikL-z_p} + z_p \right) - \overline{\alpha_0^p} - \overline{\alpha_1^p} \frac{r_p^2}{z-ikL-z_p} \right] - \right.$$

$$- \frac{b_\ell}{a_\ell} \left(\overline{\alpha_0^\ell} + \overline{\alpha_1^\ell} \frac{r_\ell^2}{z-z_\ell} \right) + \frac{1}{a_\ell} \left(Q + \sum_{p=1}^{n} (\nu_p \operatorname{ctg}(z-z_p) + c_p(z)) \right), z \in \mathcal{D}_\ell,$$
$$\ell = 1, 2, \ldots, n,$$

аналогичную системе (I.5).

§ 4. Задача ($\mathbb{R}$) для нескольких параллельных прямых на цилиндре

Пусть имеется полоса $\mathcal{D} := \{ z \in \mathbb{C}, 0 < \operatorname{Im} z < L \}$ и в ней параллельные прямые $\Gamma_k := \{ t \in \mathcal{D}, \operatorname{Im} t = h_k \}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, $0 < h_1 < \ldots < h_n = L$. Найти функции $\varphi_k(z)$, аналитические в полосах $h_k < \operatorname{Im} z < h_{k+1}$ (k = I, 2, ..., n -I) и непрерыв-